

 SESSION 2022**Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S**
Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

*Les exercices et les problèmes sont obligatoires.***Exercice 1**

3 points

I — Arithmétique

1. Montrer que pour tout entier naturel
- n
- ,

$$9^{3n+1} + 4^{6n+1}$$

est divisible par 13.

2. Résoudre dans
- $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
- l'équation
- $x^2 + \bar{3}x = \bar{4}$
- .

3. Soit
- (E)
- l'équation dans
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- définie par
- $37x - 43y = 1$
- .

En utilisant l'algorithme d'Euclide appliqué aux entiers 37 et 43, trouver une solution particulière de (E) , puis résoudre (E) .**II — Calcul matriciel**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer A^2 et A^3 .
- Vérifier que $4A + A^2 - A^3 = 4I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
- En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1} .

Exercice 2

2 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points

$$A(2; 3; 1), \quad B(-1; 1; 1), \quad C(-3; 1; 0), \quad D(4; -1; 3).$$

- Calculer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- Écrire une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et passant par le point D .

4. Montrer que le plan (ABC) et la droite (Δ) sont parallèles.

Problème 1

7 points

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un carré direct $ABCD$ tel que $AB = 4$ cm. Soit (d) la médiatrice du segment $[AB]$.

On note :

- t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$,
- t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$,
- t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$,
- $s_{(AD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AD) ,
- $f = t \circ s_{(AD)}$,
- S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme C en B .

Partie A

1. (a) Prouver que C est le barycentre du système $\{(A; -1); (B; 1); (D; 1)\}$.
 (b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan $(\mathcal{P})$ vérifiant

$$\left\| -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \right\|.$$

2. Justifier que $t = t_1 \circ t_2$.
3. Décomposer t_1 en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AD) .
4. En utilisant les résultats précédents, préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .
5. Déterminer le rapport et l'angle de S .

Partie B — *Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.*

1. (a) Écrire les expressions complexes de t et de $s_{(AD)}$.
 (b) En déduire l'expression complexe de f .
 (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f à l'aide de son expression complexe.
2. (a) En utilisant les hypothèses $S(A) = A$ et $S(C) = B$, déterminer l'expression complexe de S .
 (b) Retrouver le rapport et l'angle de S à l'aide de son expression complexe.

Problème 2

8 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0) = -2, \\ f(x) = x - 2 + e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
(b) Dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la demi-tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Partie B

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{(4x^2)^{n+1}}{1 - 4x^2} dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Soit $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1 - 4x^2} dx$.

En remarquant que $\frac{1}{1 - 4x^2} = \frac{1}{2(1 + 2x)} + \frac{1}{2(1 - 2x)}$, calculer l'intégrale I .

2. Pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n(x) = 1 + 4x^2 + (4x^2)^2 + \cdots + (4x^2)^n.$$

Vérifier que

$$S_n(x) = \frac{1}{1 - 4x^2} - \frac{(4x^2)^{n+1}}{1 - 4x^2}.$$

3. En intégrant $S_n(x)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4^2} + \frac{1}{5 \times 4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1) \times 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \ln 3 - I_n.$$

4. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+2) \times 4^{n+2}} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+2) \times 4^{n+1}}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4^2} + \frac{1}{5 \times 4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1) \times 4^{n+1}} \right).$$