

 SESSION 2021**Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S**  
**Épreuve de Mathématiques**

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

*Les exercices et les problèmes sont obligatoires.***Exercice 1**

3 points

I. On considère les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $B$  est l'inverse de  $A$ . (0,5 pt)
2. Calculer  $A + C$ . (0,25 pt)
3. Démontrer par récurrence sur  $n$  que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(0,75 pt)

II. On dispose de quatre trous  $T_1, T_2, T_3, T_4$  et quatre billes numérotées 1, 2, 3 et 4. Chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir zéro à quatre billes. On suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

A) On lance une fois les quatre billes en direction vers les quatre trous.

1. Soit  $A$  l'événement : « La bille numéro 2 est dans le trou  $T_2$  ».  
Montrer que la probabilité de l'événement  $A$  est égale à  $\frac{1}{4}$ . (0,25 pt)
2. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par le trou  $T_3$  lors d'un lancer.  
Donner la loi de probabilité de  $X$ . (0,75 pt)

B) On lance  $n$  fois de suite,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et d'une manière indépendante les quatre billes vers les quatre trous. On désigne par  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  : «  $A$  est réalisée au moins une fois lors de ces  $n$  lancers ».

Après avoir calculé  $p_n$  en fonction de  $n$ , déterminer le plus petit entier naturel  $n$  pour que  $p_n \geq 0,99$ . (0,5 pt)

**Exercice 2**

3 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1; -1; 1)$ ;  $B(3; 2; 1)$  et  $C(2; -1; 0)$ .

1. Vérifier que l'équation du plan  $(ABC)$  est :  $3x - 2y + 3z - 8 = 0$ . (0,25 pt)
2. Écrire une équation cartésienne du plan  $(P)$  contenant le point  $B$ , de vecteur normal  $\vec{AC}$ . (0,5 pt)
3. (a) Démontrer que l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(P)$  est une droite  $(D)$  d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

(0,75 pt)

- (b) Montrer que  $C$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(D)$  et en déduire la distance du point  $A$  à la droite  $(D)$ . (0,75 pt)

4. Soit  $(Q)$  le plan d'équation  $x - y + z = 1$ .  
Déterminer les coordonnées du point  $I$ , intersection des trois plans  $(ABC)$ ,  $(P)$  et  $(Q)$ . (0,75 pt)

**Problème 1**

6 points

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tels que  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$  et  $AB = AC = 3\text{cm}$ .

Soient :

- $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le milieu de  $[AC]$ .
- $E$  le point symétrique de  $B$  par rapport à  $A$ .
- $r$  la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- $t$  la translation de vecteur  $\vec{CA}$ .
- $h$  l'homothétie de centre  $I$  et de rapport 2.

On pose  $f = t \circ r$  et  $g = h \circ f$ .

**Partie A**

1. (a) Déterminer et construire le point  $D$  barycentre du système

$$S = \{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$$

(0,25 pt  $\times$  2)

- (b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $k$  la nature de l'ensemble  $(E_k)$  des points  $M$  du plan vérifiant  $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$ . (On pourra montrer que  $MD^2 = k + 18$ ). (0,75 pt)
2. Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CB$  dont l'intersection autre que  $B$  avec  $(BC)$  est notée par  $F$ . Montrer que  $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ . (0,25 pt)
3. (a) Donner la nature de  $f$ . (0,25 pt)  
 (b) On note  $K$  le milieu de  $[ED]$ . En décomposant  $t$  et  $r$  en deux symétries orthogonales convenablement choisies, déterminer les éléments caractéristiques de  $f$ . (0,5 pt)
4. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $g$ . (0,75 pt)

### Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

1. Donner l'abscisse du point  $I$ . (0,25 pt)
2. (a) Déterminer les expressions complexes de  $t$ ,  $r$  et  $h$ . (0,25 pt  $\times$  3)  
 (b) En déduire les expressions complexes de  $f$  et  $g$ . (0,25 pt  $\times$  2)  
 (c) À l'aide de l'expression complexe, retrouver les éléments caractéristiques de  $g$ . (0,25 pt  $\times$  3)

### Partie C

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère le polynôme  $P$  défini par :

$$P(z) = z^3 + (3 - 3i)z^2 + (1 - 6i)z - 1 - 3i$$

Calculer  $P(-1)$  et en déduire toutes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$ . (0,25 pt + 0,5 pt)

### Problème 2

8 points

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{1 + e^{-x}}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

## Partie A

1. (a) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ . (0,5 pt)  
 (b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ .  
 Que peut-on conclure pour la fonction  $f$ ? (0,5 pt + 0,25 pt)
2. Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ; Calculer  $f'(x)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ . (0,25 pt)
3. (a) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty, 0[$  par :  $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$   
 Étudier la variation de  $g$  et en déduire le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$ . (0,75 pt + 0,25 pt)  
 (b) Pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ; montrer que  $f'(x) = g(x)$ . (0,25 pt)
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 pt)
5. Construire la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que sa tangente (ou ses demi-tangentes) au point d'abscisse  $x_0 = 0$ . (1 pt)

## Partie B

1. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $h(x) = f(x) - x$ .  
 À l'aide de l'étude de variation de  $h$  sur l'intervalle  $[1; 2]$ , montrer que l'équation  
 $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [1; 2]$ . (0,75 pt)
2. Démontrer que pour tout  $x \in [1; 2]$  :  $f(x) \in [1; 2]$  et que  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ . (0,25 pt  $\times 2$ )
3. On considère la suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n \in [1; 2]$ . (0,5 pt)
- (b) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$  et  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . (0,5 pt  $\times 2$ )
- (c) En déduire l'étude de convergence de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . (0,25 pt)
- (d) Déterminer le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que  $U_{n_0}$  soit la valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près. (0,25 pt)

Sujet officiel transcrit dans **Le Repère**, Mathématiques Terminale S (Mamiarilala Razafimahefa).  
[amamiarilala-svg.github.io/le-repere](https://amamiarilala-svg.github.io/le-repere)